Limity funkce – výsledky

1. 0 ; -1 ; $\sqrt{2}$; 0 ; 0 ; $\frac{1}{2}$; $2e$; 1.

2. aritmetika limit „s nekonečnem":

$+\infty$; 0 ; $+\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $-\infty$; $+\infty$; $+\infty$; 0 ; 0 ; 0 ; -1 ;

limity typu „$\frac{1}{0}$":

$-\infty$; neex. ($\mp\infty$ pro $x \to -3\pm$) ; neex. ($\pm\infty$ pro $x \to 1\pm$) ; neex. ($\pm\infty$ pro $x \to 0\pm$) ; neex. ($\pm\infty$ pro $x \to -1\pm$) ;

limity typu „$\frac{0}{0}$": $\frac{1}{2}$; neex. ($\pm\infty$ pro $x \to 1\pm$)

limity typu „$\frac{\infty}{\infty}$": 2 ; 0 ; $-\infty$;

3. Trochu „těžší" limity typu „$\frac{0}{0}$", „$\frac{\infty}{\infty}$", „$\infty-\infty$":

$\frac{1}{2}$; neex. ($\pm\infty$ pro $x \to 0\pm$) ; 1 ; 1 ; -1 ; 0 ; $\frac{1}{2}$.

4. Limita složené funkce:

neex. (0 pro $x \to 3+$, $+\infty$ pro $x \to 3-$) ; 1 ; $+\infty$;
e^{-1} (pro $x \to \pm\infty$), 0 (pro $x \to 1+$), $+\infty$ (pro $x \to 1-$), tedy
neex. (pro $x \to 1$) ;
$-\infty$; $+\infty$;
limity funkce $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$: funkce $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ je definovaná
na intervalu $(-1,1)$, tedy limity pro $x \to -1+$ a pro $x \to 1-$:
$+\infty$ (pro $x \to 1-$), $-\infty$ (pro $x \to -1+$) ;
neex. ($\pm\infty$ pro $x \to 0\pm$) ; 1 ; 0.

5*: $5;\ 1;\ \frac{5}{3};\ -\frac{1}{2};\ 0;\ +\infty;\ 3;\ 0.$

6*: a) $1;\ 1;\ 0;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ -1;\ 1;\ \ln 2;\ -2;$

b) $e;\ e^{a}.$

7: $0;\ 0;\ +\infty;\ 1;\ +\infty,$

8. Neexistenci limit ukážeme užitím Heineho věty:

- $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ neexistuje:

  je-li $x_k = \frac{1}{k\pi}$, $k\in N$, pak $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_k}\right) = 0$,

  je-li $x_l = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2l\pi}$, pak $\lim\limits_{l\to\infty} x_l = 0$ a $\lim\limits_{l\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_l}\right) = 1$;

- $\lim\limits_{x\to\infty} x.\sin x$ neexistuje:

  je-li $x_k = k\pi$, pak $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$ a $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \sin x_k = \lim\limits_{k\to\infty} 0 = 0$,

  je-li $x_l = \frac{\pi}{2}+2l\pi$, pak $\lim\limits_{l\to\infty} x_l = +\infty$ a $\lim\limits_{l\to\infty} x_l \sin x_l = \lim\limits_{l\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}+2l\pi\right) = +\infty$;

- $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(1+\sin x)$ neexistuje:

  je-li $x_k = k\pi$, $k\in N$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$ a $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(1+\sin x_k) = \lim\limits_{k\to\infty}(k\pi) = +\infty$,

  je-li $x_l = \frac{3\pi}{2}+2l\pi$, $l\in N$, $\lim\limits_{l\to\infty} x_l = +\infty$ a $\lim\limits_{l\to\infty} x_l\,(1+\sin x_l) = \lim\limits_{l\to\infty} 0 = 0$.

9. a) $\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2};$ neex. ($\pm\frac{\pi}{2}$ pro $x\to 0\pm$); $0;\ \frac{\pi}{4};$

neex. ($\pm\frac{\pi}{2}$ pro $x\to 1\pm$); $\frac{\pi}{2};\ 0;\ -\frac{\pi}{4};\ -\infty;$

b) $1;\ 1;$ neex. ($\pm\infty$ pro $x\to 1\pm$); $0;\ 0;\ 1;\ 0;\ \frac{\pi}{6};$

$-\frac{\pi}{4}$ pro $x\to\pm\infty$ a neex. pro $x\to -1$ ($\pm\infty$ pro $x\to -1\pm$).

10. a) lze spojitě dodefinovat: $f(0)=0$; b) lze: $f(0)=4$; e) $f(0)=1$

c) lze: $f(0)=0$; d) lze: $f(0)=0$; f) nelze spojitě dodefinovat v bodě 0, neboť fce $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nemá limitu v bodě 0.